Géométrie dans l'Espace

I. Axiomes

Axiome I **Par deux *points* distincts de l'espace, il passe une *droite* et une seule.** (« Alignement. »)

Axiome II **Si un *plan* contient deux *points* distincts d'une même *droite*, il contient cette *droite* tout entière.** (« Droiture. »)

Axiome III **Par trois *points* non alignés de l'*espace*, il passe un *plan* et un seul.** (« Tabouret. »)

Notation Soient A, B et C trois points non alignés. Le plan passant par ces trois points sera noté (ABC).

Définition Des *points* sont dits **coplanaires** lorsqu'il existe un *plan* contenant tous ces *points*. (De même, des droites sont dites coplanaires s'il existe un plan les contenant toutes.)

Axiome IV **Deux *plans* ne peuvent avoir un unique *point* en commun.** (« Platitude. »)

Axiome V **Il existe au moins quatre *points* de l'*espace* non *coplanaires*.** (« Épaisseur. »)

Théorème 1 Par une droite donnée et un point donné n'appartenant pas à cette droite, il passe un unique plan.

Théorème 2 Par deux droites sécantes il passe un unique plan.

III. Plans parallèles

Définition Deux plans sont dits **parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point en commun (ou sont confondus).

Théorème 3 Deux plans qui ne sont pas parallèles ont pour intersection une droite...

Définition ...on dit alors qu'ils sont sécants. (On dit aussi qu'ils se coupent.)

IV. Droites parallèles

Définition Deux droites de l'espace sont dites **parallèles** lorsqu'elles sont coplanaires et qu'elles n'ont aucun point commun (ou sont confondues).

Théorème 4 Par deux droites parallèles (et non confondues), il passe un unique plan.

Théorème 5 (extension à l'espace de l'axiome des parallèles)

Dans l'espace, par un point donné, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

Théorème 6 (trace de plans parallèles sur un plan ; très utile)

Deux plans parallèles entre eux coupent un troisième en deux droites parallèles.

Théorème 7 (transitivité du parallélisme des plans)

Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

THÉORÈME 8 dit « du toit »

Si deux plans sécants passent par deux droites parallèles données, la droite constituant leur intersection est parallèle à chacune des deux droites données.

THÉORÈME 9 (transitivité du parallélisme des droites)

Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

V. DROITE ET PLAN PARALLÈLES

DÉFINITION Un plan et une droite de l'espace sont dits **parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point en commun (ou si la droite est incluse dans le plan).

THÉORÈME 10 (*caractérisation* du parallélisme entre une droite et un plan)

Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite de ce plan.

THÉORÈME 11 (*caractérisation* du parallélisme des plans)

Deux plans sont parallèles ssi l'un contient deux droites sécantes, parallèles chacune à l'autre plan.

VI. ORTHOGONALITÉ

DÉFINITIONS Deux droites de l'espace sont dites **perpendiculaires** si elles sont contenues dans un même plan et si, dans ce plan, elles sont perpendiculaires au sens de la géométrie plane.

Deux droites de l'espace sont dites **orthogonales** s'il existe une parallèle à l'une perpendiculaire à l'autre.

THÉORÈME 12 Si deux droites sont *orthogonales*, alors toute *parallèle* à l'une sécante avec l'autre est *perpendiculaire* à cette dernière.

DÉFINITION Une droite est dite **orthogonale** à un plan lorsque cette droite est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

THÉORÈME 13 Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

La démonstration de ce théorème, non traitée ici, est plus difficile que celles des théorèmes précédents.

DÉFINITION Deux plans de l'espace sont dits orthogonaux s'il existe une droite contenue dans l'un et orthogonale à l'autre.

VII. POLYÈDRES

On donne ici les définitions de quelques polyèdres particuliers.

PARALLÉLÉPIPÈDE

Définition

Un **parallélépipède** est un hexaèdre dont les faces sont parallèles deux à deux.

Caractérisation

Un parallélépipède est un hexaèdre dont les faces sont des parallélogrammes.

Cas particuliers

Si les faces sont des rectangles, on parle de **parallélépipède rectangle**. Si les faces sont des carrés, le parallélépipède est un **cube**. Si l'on considère le parallélépipède et son intérieur, on l'appellera plutôt **pavé**. La parallélépipède est alors la surface du pavé. Si la surface est un parallélépipède rectangle, on parlera de **pavé droit**.

PRISME

Un **prisme** est un polyèdre formé de deux faces parallèles et isométriques, jointes par des parallélogrammes. Ce sont les plans qui contiennent les faces, qui sont parallèles. Ces deux faces parallèles et isométriques sont les **bases** du prisme. (Un prisme peut être vu comme un « cylindre à base polygonale ».)

PYRAMIDE

Une **pyramide** est un polyèdre formée d'une base polygonale dont tous les sommets sont reliés à un même point. Ce point ne doit pas appartenir au plan de la base. On peut l'appeler le sommet du prisme, mais on l'appelle aussi l'*apex*. (Une pyramide peut être vue comme un « cône à base polygonale ».)